Concursul Fractal

Prima Ediție, 10 Noiembrie 2024

Problema 1. Arătați că orice progresie aritmetică la care primul termen și rația sunt numere naturale nenule conține o infinitate de termeni compuși.

*Un număr este compus dacă acesta nu este prim.

Soluție: Fie progresia noastră aritmetică definită ca $x_n = an + b$, pentru orice n natural, inclusiv 0. Atunci, pentru $x = k(a + b) + 1$ pentru un număr natural k, avem că $x = (a+b)(ak+1)$, și ambii factori sunt mai mari decât 1, căci b este primul termen al secvenței, deci este nenul, la fel și a.
Un alt exemplu de construcție este $x = kb$, atunci însă trebuie să avem grijă ca b să nu fie egal cu 1.

Problema 2. Un dreptunghi $m \times n$, unde m și n sunt numere naturale strict mai mari decât 1, este partiționat în mn pătrățele cu latura 1, fiecare dintre care poate fi colorat în alb sau negru. O operație constă în schimbarea culorii tuturor pătrățelelor de pe un rând sau de pe o coloană în culoarea opusă. Este oare posibil ca, deși inițial exact un pătrățel este colorat negru, iar toate celelalte sunt albe, după un număr finit de mutări toate pătrățelele să aibă aceeași culoare?

Soluție: Răspunsul este NU. Considerăm un pătrat 2×2, unul dintre pătrățelele căruia este negru, iar toate celelalte sunt albe. Operațiile rămân aceleași, adică în interiorul acestui pătrat putem schimba culoarea unei întregi coloane sau a unui întreg rând. Astfel, este suficient să arătăm că în acest pătrat va rămâne mereu cel puțin un pătrat negru. Însă aceasta este evident, căci orice operație nu am face, numărul de pătrățele negre rămâne impar.

Problema 3. Fie a, b, c trei numere reale pozitive care satisfac $ab + bc + ca = 1$. Arătați că:

$$\frac{a}{a^2+1} + \frac{b}{b^2+1} + \frac{c}{c^2+1} \leq \frac{1}{4abc}$$

Soluție: Este ușor să observăm că $(a+b)(a+c) = a^2 + ab + bc + ca$, astfel:

$$\frac{a}{a^2+1} = \frac{a}{a^2+ab+bc+ca} = \frac{a}{(a+b)(a+c)} = \frac{ab+ac}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

Deci suma din partea stângă devine:

$$\frac{2ab+2bc+2ac}{(a+b)(a+c)(b+c)} = \frac{2}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

Astfel, inegalitatea s-a redus la a arăta că $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$, însă din inegalitatea mediilor avem: $a+b \geq 2\sqrt{ab}$, $a+c \geq 2\sqrt{ac}$, $b+c \geq 2\sqrt{bc}$.
Înmulțind parte cu parte ultimele trei inegalități obținem concluzia.

Problema 4. În triunghiul ABC, D, E și F sunt picioarele perpendicularelor duse din vârfurile A, B și C, respectiv. Paralela dusă la EF prin D intersectează AB în P_B și AC în P_C. Fie X intersecția dintre EF și BC. Arătați că cercul circumscris triunghiului P_BP_CX trece prin mijlocul laturii BC.

Soluție: Dacă notăm mijlocul segmentului BC cu M, vrem să arătăm că patrulaterul XP_BP_CM este ciclic. Aplicând puterea punctului din D, este necesar să arătăm că $DX \cdot DM = DP_B \cdot DP_C$. Observăm acum că, datorită paralelismului, avem $m(\angle P_CP_BA) = m(\angle FEA) = m(\angle BCA)$, deci patrulaterul P_BP_CX este ciclic, respectiv $DP_B \cdot DP_C = DB \cdot DC$. Deci este necesar să arătăm că $DX \cdot DM = DB \cdot DC$, ceea ce, după manipulații algebrice, se transformă în $\frac{BD}{CD} = \frac{BX}{CX}$, care este bine cunoscut și reiese, de exemplu, din teorema lui Menelaus.